Promenade ergodique au pays des fractions continues
– un clin d'œil de la théorie de la mesure à la théorie des nombres

Mitia Duerinckx *
mduerinc@ulb.ac.be

Résumé

Après une brève introduction aux fractions continues, nous verrons comment les techniques de la théorie ergodique permettent d'obtenir toute une série de résultats statistiques très étonnants concernant le développement en fraction continue de presque tout nombre réel – à l'instar du fameux théorème de Borel sur les nombres normaux, pour le développement en base b.

Par ailleurs, le développement en fraction continue est à la base de l'approximation diophantienne, dont l'étude est si fructueuse en théorie des nombres. Les résultats statistiques développés permettront en particulier de déduire que les nombres mal approximables sont de mesure nulle, de même que les nombres très bien approximables.

Contents

*Mitia Duerinckx est un étudiant en Master en Sciences Mathématiques à l'Université libre de Bruxelles. Il détient un Bachelier en Sciences Mathématiques de l'Université libre de Bruxelles. Durant son Bachelier il a obtenu les prix Fleurice Mercier, Ruth et Joe Gani, et Georges Sterpenich de l'Université libre de Bruxelles.

1 Introduction aux fractions continues

Étant donnée une suite d'entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$, on peut considérer la suite de rationnels :

$$\frac{1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} =: [a_1], \qquad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{p_2}{q_2} =: [a_1, a_2], \qquad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{p_3}{q_3} =: [a_1, a_2, a_3], \quad \ldots$$

où, pour chaque terme de la suite, les entiers positifs p_n et q_n, appelés les *convergents*, sont choisis copremiers et sont ainsi univoquement déterminés. Il est pratique de définir en outre $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$. La *fraction continue* associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est la limite formelle de la suite $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, notée

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} =: [a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Mais il se trouve que cette expression explicite n'est en fait pas seulement formelle : en effet, comme nous allons le voir, la suite des convergents $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge toujours ! Nous commençons par démontrer quelques propriétés fondamentales, dont nous ferons un usage régulier dans la suite.

Lemme 1. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence. Le cas $n = 1$ est trivial, puisque de toute manière $p_1 = 1$ et $q_1 = a_1$. Supposons donc le résultat vrai pour $n = k - 1$ et toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Nous pouvons écrire

$$\frac{p_l}{q_l} = [a_1, a_2, \ldots, a_l] = \frac{1}{a_1 + [a_2, \ldots, a_l]} = \frac{1}{a_1 + \frac{\tilde{p}_{l-1}}{\tilde{q}_{l-1}}} = \frac{\tilde{q}_{l-1}}{a_1\tilde{q}_{l-1} + \tilde{p}_{l-1}},$$

où $\tilde{p}_n$, $\tilde{q}_n$ sont les convergents correspondant à la suite $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ceci implique clairement $p_l = \tilde{q}_{l-1}$ et $q_l = a_1\tilde{q}_{l-1} + \tilde{p}_{l-1}$, pour tout l.

Or, par l'hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour $n = k - 1$ et la suite $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$, de sorte que

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_{k-1} & \tilde{q}_{k-2} \\ \tilde{p}_{k-1} & \tilde{p}_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc, par ce qui précède,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_{k-1} & \tilde{q}_{k-2} \\ \tilde{p}_{k-1} & \tilde{p}_{k-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1\tilde{q}_{k-1} + \tilde{p}_{k-1} & a_1\tilde{q}_{k-2} + \tilde{p}_{k-2} \\ \tilde{q}_{k-1} & \tilde{q}_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_k & q_{k-1} \\ p_k & p_{k-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Corollaire. *(1) Pour tout $n \geq 1$,*

$$\begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}. \end{cases}$$

(2) Les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement croissantes. De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{cases} p_n \geq 2^{(n-2)/2} \\ q_n \geq 2^{(n-2)/2}. \end{cases}$$

(3) Pour tout $n \geq 1$,

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

(4) Pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k}.$$

Démonstration. (1) Le lemme 1 donne

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} & q_n \\ p_{n+1} & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où se déduisent les relations voulues.

(2) Comme $a_k \geq 1$ et $p_k \geq 1$ pour tout k, le point précédent donne $p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \geq p_n + p_{n-1} > p_n$, de sorte que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est strictement croissante.
Pour l'autre partie, raisonnons par induction. Nous avons bien sûr $p_1 \geq 1 \geq 2^{-1/2}$ et $p_2 \geq 1 = 2^0$. Supposons ensuite $p_n \geq 2^{(n-2)/2}$ pour $n = k-1$ et $n = k$. Comme $p_{k+1} \geq p_k + p_{k-1}$, nous déduisons alors comme voulu

$$p_{k+1} \geq 2^{(k-2)/2} + 2^{(k-3)/2} = 2^{(k-3)/2}(1 + 2^{1/2}) \geq 2^{(k-3)/2} 2 = 2^{(k+1-2)/2}.$$

Un raisonnement analogue donne le résultat pour la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(3) Il suffit de prendre le déterminant des deux membres de (1).

(4) Le résultat du point précédent peut se réécrire

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k}, \quad \text{pour tout } k,$$

dont une utilisation répétée donne

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} + \frac{(-1)^{n-2}}{q_{n-2} q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$$
$$= \ldots = \frac{p_0}{q_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k},$$

en se rappelant $p_0 = 0$.

□

Les propriétés précédentes permettent enfin de voir que, comme annoncé plus haut, la limite définissant la fraction continue associée à une quelconque suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ a bien toujours un sens, et n'est donc pas juste une expression formelle.

Théorème 2. *Pour toute suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$*, la suite des convergents associés* $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $]0,1[$.

Démonstration. Grâce au corollaire 1(iv), nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1}q_k},$$

où la série converge absolument, comme le montre le corollaire 1(ii). □

De plus, nous voyons aisément que la suite des convergents oscille autour de la valeur de la fraction continue, tout en s'en rapprochant.

Proposition 3.

$$0 = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \ldots < [a_1, a_2 \ldots] < \ldots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} < 1.$$

Démonstration. Il suffit d'examiner la somme alternée du corollaire 1(iv) et de remarquer que, comme la suite $(q_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ est strictement croissante, la suite $\left(\frac{1}{(q_{k-1}q_k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ doit être strictement décroissante. □

La suite des convergents constitue en fait la suite de rationnels qui approche de façon optimale la valeur de la fraction continue correspondante, en un certain sens. Nous reviendrons en détail sur ce point à la section 4 ; pour l'instant, contentons-nous de donner de simples bornes sur l'approximation.

Proposition 4. *Pour tout* $u = [a_1, a_2, \ldots]$,

$$\frac{1}{q_{n+2}^2} < \frac{1}{q_n q_{n+2}} < \left|u - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Démonstration. D'une part,

$$\begin{aligned}\left|u - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1}q_k}\right| \quad \text{par le corollaire 1(4),}\\ &< \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad \text{comme la suite } \left(\frac{1}{q_{k-1}q_k}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ est strictement décroissante,}\end{aligned}$$

D'autre part, en vertu de la proposition 3, nous avons soit $p_n(x)/q_n(x) < x < p_{n+1}(x)/q_{n+1}(x)$ (si n est pair), soit $p_{n+1}(x)/q_{n+1}(x) < x < p_n(x)/q_n(x)$ (si n est impair). Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| &= \left|\frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)}-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|-\left|\frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)}-x\right| \\
&= \left|\frac{p_{n+1}(x)q_n(x)-p_n(x)q_{n+1}(x)}{q_n(x)q_{n+1}(x)}\right|-\left|\frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)}-x\right| \\
&> \left|\frac{(-1)^n}{q_n(x)q_{n+1}(x)}\right|-\frac{1}{q_{n+1}(x)q_{n+2}(x)} \quad \text{par ce qui précède et le corollaire 1(iii),} \\
&= \frac{q_{n+2}(x)-q_n(x)}{q_n(x)q_{n+1}(x)q_{n+2}(x)}=\frac{a_{n+2}(x)q_{n+1}(x)}{q_n(x)q_{n+1}(x)q_{n+2}(x)} \quad \text{par le corollaire 1(i).} \\
&\geq \frac{1}{q_n(x)q_{n+2}(x)}.
\end{aligned}$$

La croissance stricte de la suite $(q_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ permet de conclure. □

Nous observons à présent que la valeur de toute fraction continue est irrationnelle, et que les fractions continues permettent de représenter de façon unique tous les irrationnels. Plus précisément,

Théorème 5. *L'application*

$$\alpha: \quad \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} \to \,]0,1[\,\setminus\mathbb{Q}: \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\mapsto[a_1,a_2,\dots]$$

est bien définie et bijective.

Démonstration. (1) α **bien définie.** Le théorème 2 montre déjà que $[a_1,\dots]$ converge toujours dans $]0,1[$. Reste à vérifier l'irrationalité de la limite. Pour ce faire, supposons, par l'absurde, que, pour une certaine suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, on ait $[a_1,\dots]=r/s\in\mathbb{Q}$, où nous prenons r,s entiers positifs copremiers. Mais alors, par la proposition 4,

$$\left|\frac{r}{s}-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}, \quad \text{pour tout } n,$$

de sorte que $|rq_n-sp_n|<s/q_n$. Or, $q_n\to\infty$ (voir corollaire 1(ii)), et donc, pour tout n assez grand, on doit avoir $rq_n=sp_n$, c'est-à-dire $r/s=p_n/q_n$, d'où $r=p_n$ et $s=q_n$. Ceci contredit $q_n\to\infty$!

(2) α **injective.** Supposons $[a_1,\dots]=[b_1,\dots]$. Alors,

$$a_1+\underbrace{\frac{1}{[a_2,\dots]}}_{\in]0,1[}=[a_1,\dots]^{-1}=[b_1,\dots]^{-1}=b_1+\underbrace{\frac{1}{[b_2,\dots]}}_{\in]0,1[},$$

de sorte que $a_1=b_1$ et $[a_2,\dots]=[b_2,\dots]$. Le résultat se déduit par récurrence.

(3) α **surjective.** Soit $u\in\,]0,1[\,\setminus\mathbb{Q}$. On cherche une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\subset\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$ telle que

$$u=[a_1,a_2\dots]=\frac{1}{a_1+[a_2,\dots]}.$$

Nous devons donc avoir

$$\frac{1}{u} = a_1 + [a_2, \ldots] \in (a_1, a_1 + 1),$$

c'est-à-dire $a_1 = \lfloor 1/u \rfloor$ [1], et par conséquent

$$[a_2, \ldots] = \frac{1}{u} - \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor =: Tu,$$

où nous avons défini l'*application de Gauss*

$$T :]0,1[\to]0,1[: x \mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor =: \left\langle \frac{1}{x} \right\rangle.$$ [2]

En répétant le même raisonnement, nous obtenons $a_2 = \lfloor 1/Tu \rfloor$, et en général $a_n = \lfloor 1/T^{n-1}u \rfloor$. Enfin, nous voyons aisément que, pour tout n,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = [a_1, \ldots, a_{2n}] < u < [a_1, \ldots, a_{2n+1}] = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}},$$

et donc, comme la suite des convergents converge, la limite ne peut être que u, et on obtient $u = [a_1, \ldots]$, comme recherché. □

La troisième partie de la démonstration du résultat précédent montre donc que tout irrationnel (dans $]0,1[$) peut être développé en fraction continue – ce qui, de plus, peut se faire via un algorithme très simple, basé sur l'application de Gauss. Par ailleurs, ce *développement en fraction continue* (DFC) est unique, puisque α est injective.

Notons que nous pouvons, de même, définir le DFC de tout rationnel dans $]0,1[$ (en une fraction continue de longueur finie, cette fois, évidemment) – sauf que l'unicité est alors perdue : nous laissons le lecteur vérifier qu'un rationnel admet toujours exactement deux DFC finis (l'un finissant par 1 et l'autre, non). [3] De plus, l'algorithme construit ci-dessus s'applique bien sûr aussi aux rationnels (en arrêtant le développement dès que $T^n x = 0$) et en donne l'un des deux DFC (celui qui ne finit pas par 1).

Par ailleurs, quoique nous travaillerons ici exclusivement dans l'intervalle $]0,1[$, nous pourrions définir le DFC d'un réel quelconque x en écrivant $x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots] =: [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, où $a_0 = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

À l'instar du développement en une base b quelconque, le DFC est donc une façon de représenter tout nombre réel. De plus, de même que le développement en base b est unique si nous excluons les développements terminant par une infinité de chiffres $b-1$, le DFC sera toujours unique si nous prenons, par exemple, la convention d'exclure les développements de longueur finie terminant par 1 (pour les rationnels). Toutefois, nous n'insisterons pas sur ce dernier point, car, dans la suite, nous nous placerons du point de vue de la théorie de la mesure, et,

1. Nous notons, comme d'habitude, $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière.
2. Nous notons, comme d'habitude, $\langle \cdot \rangle$ la partie fractionnaire.
3. Le lecteur pensera à

$$[2] = \frac{1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = [1,1].$$

comme les rationnels sont de mesure de Lebesgue nulle, nous ne devrons pas nous préoccuper des ennuis qu'ils engendrent.

Un intérêt majeur du DFC en théorie des nombres est que certaines de ses propriétés traduisent des propriétés intrinsèques du nombre en question : ainsi, nous venons de voir qu'un nombre est rationnel si et seulement si il possède un DFC fini (critère parfois pratique pour prouver l'irrationalité de certains réels). Dans cette idée, nous mentionnerons encore :

Théorème 6 (Lagrange). *Soit $u \in]0,1[$. Alors, u est quadratique (*i.e. *solution d'une équation polynomiale de degré 2 à coefficients entiers) si et seulement si son DFC est périodique au-delà d'un certain indice.*

Démonstration. Voir, par exemple, le théorème 3.12 de [5]. □

Il serait peut-être intéressant de clore cette section par quelques exemples de calculs de DFC :

(1) $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{1+(\varphi-1)} = [1,1,1,\dots]$ (où φ désigne le nombre d'or),

(2) $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = [2,2,2,\dots]$,

(3) $\sqrt{3} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} = [1,2,1,2,\dots]$,

(4) $\pi - 3 = \frac{1}{1/(\pi-3)} = \frac{1}{7+0{,}062\dots} = \dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15+0{,}996\dots}} = \dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15+\dfrac{1}{1+0{,}003\dots}}}$

$= [7,15,1,292,\dots]$.

Du point de vue du DFC, le nombre d'or apparaît donc comme l'irrationnel « le plus simple » ; c'est d'ailleurs de ce fait que découlent moult propriétés exceptionnelles de ce nombre.

2 Rappels de théorie ergodique

Née de problèmes en physique statistique à la fin du XIXe siècle, la théorie ergodique a connu un rapide essor, principalement à partir des années 1930 dans le cadre de l'avènement de la théorie de la mesure. Outre à la physique, son influence s'étend à de nombreuses disciplines mathématiques : probabilités, théorie des nombres, algèbre, combinatoire, *etc*. De façon générale, la théorie ergodique étudie le mouvement sur des espaces de mesure.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité [4]. Considérons $T : \Omega \to \Omega$ un *endomorphisme d'espace de probabilité*, c'est-à-dire une application telle que

(1) T est mesurable ;

(2) T préserve la mesure : $\forall E \in \mathcal{A}$, $P(T^{-1}E) = P(E)$, c'est-à-dire $T^*P = P$.

4. Pour simplifier, nous nous restreignons ici à des espaces de probabilité, mais tous les résultats de cette section s'étendent trivialement à des espaces de mesure normalisables – voire, dans une certaine mesure, à des espaces σ-finis.

Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{A}, P, T)$ est alors appelé un *système dynamique normalisé* (à temps discret), et P est parfois appelée une *mesure de probabilité invariante*.

L'application T induit naturellement un « mouvement » (discret) dans l'espace Ω, l'évolution du système étant décrite par les itérées

$$T^n := \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ fois}}.$$

Une question essentielle est l'étude du comportement asymptotique moyen de quantités associées au système, le long des trajectoires $(T^n\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\omega \in \Omega)$: en particulier, il s'agit d'étudier les moyennes temporelles

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

L'hypothèse sur laquelle se base toute la physique statistique est la convergence de ces moyennes temporelles vers la moyenne spatiale $\int_\Omega f \, \mathrm{d}P$. Cependant, le lecteur peut aisément vérifier que la convergence vers cette constante n'a pas lieu en général. L'hypothèse minimale pour s'assurer de cette convergence est la propriété d'*ergodicité*.

Définition 7. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P, T)$ un système dynamique normalisé. Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit *invariant* si $P(A \,\Delta\, T^{-1}A) = 0$. [5]

Définition 8. Un système dynamique normalisé $(\Omega, \mathcal{A}, P, T)$ est dit *ergodique* si, pour tout $A \in \mathcal{A}$ invariant, nous avons $P(A) = 0$ ou 1.

En d'autres termes, un système est ergodique s'il est indécomposable, insécable, c'est-à-dire s'il ne peut pas être décomposé en deux sous-systèmes non triviaux.

Théorème 9 (Corollaire du théorème de Birkhoff [6]). *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P, T)$ *un système dynamique normalisé ergodique. Pour tout* $f \in \mathrm{L}^1$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega f \, \mathrm{d}P = \mathrm{E}f \quad \textit{presque sûrement.} \tag{2}$$

Démonstration. Voir, par exemple, [5], [3] ou [4]. □

Nous laissons comme exercice au lecteur de vérifier que, si le système n'est pas ergodique, on peut toujours trouver une fonction f qui ne satisfait pas la limite (2) – de sorte que l'hypothèse d'ergodicité est bien minimale.

Pour justifier la physique statistique, il s'agirait donc de prouver l'ergodicité de tous les systèmes qui y sont considérés. Nonobstant, prouver l'ergodicité de systèmes même très simples est souvent un problème hautement délicat, et beaucoup de questions à ce sujet demeurent encore ouvertes aujourd'hui.

5. Nous notons, comme d'habitude, Δ la différence symétrique d'ensembles.

6. Le théorème de Birkhoff (1931) [2] est beaucoup plus général que le résultat énoncé ici : il affirme, sans aucune hypothèse d'ergodicité, la convergence (presque sûre et dans L^1) des moyennes temporelles, et énonce diverses propriétés de la fonction limite.

3 Système de Gauss et théorème de Khintchine-Lévy

Comme vu dans la preuve du théorème 5, le développement en fraction continue $[a_1, a_2, \ldots]$ d'un nombre $u \in]0,1[$ s'obtient via

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}u} \right\rfloor, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0,$$

où T est l'*application de Gauss*, définie par

$$T :]0,1[\to]0,1[: x \mapsto \left\langle \frac{1}{x} \right\rangle.$$

Remarquons que $T[a_1, a_2, \ldots] = [a_2, \ldots]$, ce qui signifie que cette application agit comme un décalage des fractions continues.

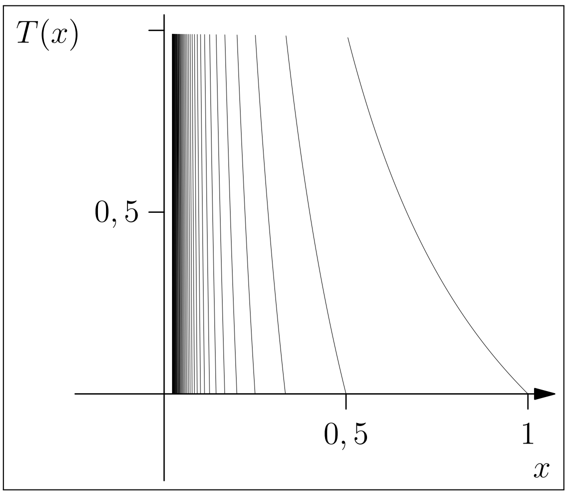

FIGURE 1 — L'application de Gauss.

Les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sont donc des fonctions des itérées $T^n u$, de sorte que, si nous parvenons à nous placer dans le cadre de la théorie ergodique, nous pourrons espérer déduire de nombreux résultats intéressants. Plus précisément, il s'agit de munir $\Omega =]0,1[$ d'une structure d'espace de probabilité de telle sorte que T soit un endomorphisme ergodique de cet espace : nous cherchons donc une mesure de probabilité invariante et ergodique.

Comme nous allons le voir, une solution de ce problème est donnée par la *mesure de Gauss* P_G, découverte par Gauss dès 1845, et définie par

$$P_G(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M},$$

où nous notons $\mathcal{M}$ la σ-algèbre de Lebesgue sur $]0,1[$.

Le lecteur vérifiera immédiatement qu'il s'agit bien là d'une mesure de probabilité sur $]0,1[$. De plus, si nous notons m la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$, on remarque que

$$\frac{1}{2\log 2}\, m \le P_G \le \frac{1}{\log 2}\, m,$$

ce qui implique $P_G \ll m$ et $m \ll P_G$. Dès lors, en particulier, $\mathrm{L}^1(P_G) = \mathrm{L}^1(m)$, et une propriété est vraie P_G-presque partout (p.p.) si et seulement si elle est vraie m-p.p.

Théorème 10. *La mesure de Gauss est invariante pour l'application de Gauss. En d'autres termes, l'application de Gauss est un endomorphisme de l'espace de probabilité* $(]0,1[,\mathcal{M},P_G)$.

Démonstration. Pour tout $]a,b[\subset]0,1[$,

$$T^{-1}(]a,b[) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+b},\frac{1}{n+a}\right) \in \mathcal{M}.$$

Comme tout ouvert de $]0,1[$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'intervalles, nous déduisons que $T^{-1}U \in \mathcal{M}$ pour tout ouvert U, et donc aussi $T^{-1}B \in \mathcal{M}$ pour tout borélien B. Comme $\mathcal{M}$ coïncide avec la complétion des boréliens, nous pouvons conclure $T^{-1}A \in \mathcal{M}$ pour tout $A \in \mathcal{M}$. Ceci prouve la mesurabilité de l'application de Gauss.
D'autre part, pour $]a,b[\subset]0,1[$, nous calculons

$$\begin{aligned}
P_G(T^{-1}(]a,b[)) = P_G\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+b},\frac{1}{n+a}\right)\right) &= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/(n+b)}^{1/(n+a)}\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\log_2\left(\frac{1+\frac{1}{n+a}}{1+\frac{1}{n+b}}\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\log_2\frac{n+1+a}{n+1+b} - \log_2\frac{n+a}{n+b}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\log_2\frac{N+1+a}{N+1+b} - \log_2\frac{1+a}{1+b}\right) \\
&= \log_2\frac{1+b}{1+a} = P_G]a,b[.
\end{aligned}$$

On déduit alors $P_G(T^{-1}A) = P_G(A)$ pour tout ouvert A, et donc aussi pour tout borélien. Comme $\mathcal{M}$ n'est rien d'autre que la complétion des boréliens, on conclut aisément. □

La preuve de l'ergodicité du système de Gauss est très technique, de sorte que nous l'omettons ici. Notons que prouver l'ergodicité de systèmes est souvent une chose hautement délicate.

Théorème 11. *Le système de Gauss* $(]0,1[,\mathcal{M},P_G,T)$ *est ergodique.*

Démonstration. Voir, par exemple, [5], [3] ou [6]. □

Dès lors, le théorème 9 peut s'appliquer : pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(P_G) = \mathrm{L}^1(m)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f\,\mathrm{d}P_G = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y$$

pour presque tout x (au sens de la mesure de Lebesgue). L'ergodicité de l'application de Gauss va ainsi nous permettre de déduire une information statistique précise sur les chiffres du DFC de presque tout nombre réel – à l'instar du théorème de Borel sur les nombres normaux, avec le développement en base b.

Théorème 12 (Khintchine, Lévy, Loch). *Pour $x \in]0,1[$, notons $[a_1(x), a_2(x), \ldots]$ son DFC, et $p_n(x)/q_n(x)$ les convergents. Alors, pour presque tout x (au sens de la mesure de Lebesgue),*

(1) le chiffre $\alpha \in \mathbb{N}_0$ apparaît dans le DFC de x avec fréquence $\log_2\left(\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha(\alpha+2)}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1(x) + \ldots + a_n(x)) = +\infty$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1(x)\ldots a_n(x))^{1/n} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)^{\log k/\log 2} =: K$;[7]

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log p_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log q_n(x) = \frac{\pi^2}{12\log 2}$;[8]

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| = -\frac{\pi^2}{6\log 2}$.

Démonstration. (1) Le chiffre $\alpha \in \mathbb{N}_0$ apparaît dans le DFC de x avec fréquence

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\left\{i : 1 \le i \le n,\, a_i(x) = \lfloor 1/T^{i-1}x \rfloor = \alpha\right\} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\left\{i : 1 \le i \le n,\, \frac{1}{\alpha+1} < T^{i-1}x \le \frac{1}{\alpha}\right\} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[1/(\alpha+1),1/\alpha]}(T^i x) \\
&\quad = \frac{1}{\log 2}\int_{1/(\alpha+1)}^{1/\alpha} \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

pour presque tout x au sens de la mesure de Lebesgue (dans la suite, nous noterons cela « $\forall' x$ »), puisque $\mathbb{1}_{[1/(\alpha+1),1/\alpha]}$ est intégrable.

(2) Nous voudrions ici poser simplement $f(x) = a_1(x) = \lfloor 1/x \rfloor$, mais cette fonction n'est pas intégrable, car

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/(k+1)}^{1/k} k \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty \ldots$$

L'idée est alors de tronquer f, et de considérer ainsi, pour $M > 0$, la fonction intégrable

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \le M \\ 0 & \text{si } f(x) > M \end{cases}$$

7. Cette constante K est appelée la *constante de Khintchine* ; sa valeur numérique est approximativement 2,685 452 001 065 306 445 309 714 835 481 795 693 820 382 293 994 462 953 051 152 345 557 218 859 537 152 002 801 141 174 931 847 698. Il est encore inconnu à ce jour si cette constante est rationnelle ou irrationnelle !

8. En d'autres termes, pour presque tout x, nous avons $\lim_{n\to\infty} p_n(x)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} q_n(x)^{1/n} = e^{\frac{\pi^2}{12\log 2}} \approx 3.2758229\ldots$; cette constante est parfois appelée la *constante de Lévy*.

On obtient alors, pour $M > 0$ fixé,

$$\begin{aligned}
\liminf \frac{1}{n}(a_1(x) + \ldots + a_n(x)) &= \liminf \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)\\
&\geq \liminf \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_M(T^k x)\\
&= \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f_M(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y, \quad \forall' x\\
&\geq \frac{1}{2\log 2}\int_0^1 f_M(y)\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2\log 2}\int_{1/(M+1)}^1 \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor \mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2\log 2}\sum_{k=1}^{M}\int_{1/(k+1)}^{1/k} k\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2\log 2}\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

En prenant M arbitrairement grand, on voit donc que

$$\liminf \frac{1}{n}(a_1(x) + \cdots + a_n(x)) = \infty,$$

ce qui donne le résultat annoncé.

(3) Soit $f(x) = \log a_1(x) = \log\lfloor 1/x \rfloor$. Cette fonction est bel et bien intégrable, car

$$\log(1-x) - \log x < f(x) \leq -\log x, \quad \text{pour tout } x.$$

Nous déduisons alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_1(x)\ldots a_n(x))^{1/n} &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y\right), \quad \forall' x\\
&= \exp\left(\frac{1}{\log 2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{1/(k+1)}^{1/k}\frac{\log k}{1+y}\,\mathrm{d}y\right)\\
&= \exp\left(\frac{\log k}{\log 2}\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+1}}\right)\right).
\end{aligned}$$

(4) Nous prouvons d'abord le résultat pour $q_n(x)$; on en déduira ensuite celui pour $p_n(x)$. Commençons par essayer d'exprimer $q_n(x)$ de façon à voir

apparaître une moyenne spatiale. Remarquons que

$$\frac{p_k(y)}{q_k(y)} = \frac{1}{a_1(y)+[a_2(y),\dots,a_k(y)]} = \frac{1}{a_1(y)+\dfrac{p_{k-1}(Ty)}{q_{k-1}(Ty)}} = \frac{q_{k-1}(Ty)}{a_1(y)q_{k-1}(Ty)+p_{k-1}(Ty)},$$

de sorte que $p_k(y) = q_{k-1}(Ty)$, pour tout k et tout y. Nous pouvons alors écrire

$$\frac{1}{q_n(x)} = \frac{\cancel{p_n(x)}}{q_n(x)}\frac{\cancel{p_{n-1}(Tx)}}{\cancel{q_{n-1}(Tx)}}\cdots\frac{1}{\cancel{q_1(T^{n-1}x)}} = \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\frac{p_{n-1}(Tx)}{q_{n-1}(Tx)}\cdots\frac{p_1(T^{n-1}x)}{q_1(T^{n-1}x)},$$

puisque $p_1(y) = 1$ pour tout y. Ceci donne donc

$$-\frac{1}{n}\log q_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log\frac{p_{n-j}(T^jx)}{q_{n-j}(T^jx)} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log(T^jx)}_{=:S_n(x)} - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log\frac{T^jx}{p_{n-j}(T^jx)/q_{n-j}(T^jx)}}_{=:R_n(x)}.$$

La première partie donne précisément ce que nous cherchons :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n(x) &= \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\log y}{1+y}\,\mathrm{d}y, \quad \forall' x\\
&= -\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\log(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y, && \text{en intégrant par parties}\\
&= -\frac{1}{\log 2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^k\frac{y^k}{k+1}\,\mathrm{d}y, && \text{par convergence uniforme de la série de Taylor sur } [0,1],\\
&= -\frac{1}{\log 2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\\
&= -\frac{\pi^2}{12\log 2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, comme nous pouvons nous y attendre, $|R_n|$ est borné par une constante, de sorte que $\frac{1}{n}R_n(x) \to 0\ \forall x$, et le résultat pour q_n sera ainsi démontré. Essayons de le prouver rigoureusement. La proposition 4 et le corollaire 1(ii) donnent, pour tout y et tout k,

$$\left|\frac{y}{p_k(y)/q_k(y)} - 1\right| \le \frac{1}{p_k(y)q_{k+1}(y)} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

En particulier, si $k \geq 2$,

$$\left|\frac{y}{p_k(y)/q_k(y)} - 1\right| < \frac{1}{2}, \quad \text{c'est-à-dire } \frac{y}{p_k(y)/q_k(y)} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Comme $|\log u| \leq 2|u-1|$ pour tout $u \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, nous pouvons borner

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left|\log \frac{T^j x}{p_{n-j}(T^j x)/q_{n-j}(T^j x)}\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-2} 2 \underbrace{\left|\frac{T^j x}{p_{n-j}(T^j x)/q_{n-j}(T^j x)} - 1\right|}_{\leq 1/2^{n-j-1}} + \left|\log \frac{T^{n-1} x}{p_1(T^{n-1} x)/q_1(T^{n-1} x)}\right| \\
&\leq 2 + |\log[a_1(T^{n-1} x) T^{n-1} x]|.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout y,

$$\frac{1}{a_1(y)+1} < y = \frac{1}{a_1(y) + \underbrace{[a_2(y), \ldots]}_{\in]0,1[}} < \frac{1}{a_1(y)},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\log \frac{1}{2} \leq \log & \frac{a_1(T^{n-1} x)}{1 + a_1(T^{n-1} x)} \\
& < \log[a_1(T^{n-1} x) T^{n-1} x] < \log[a_1(T^{n-1} x)/a_1(T^{n-1} x)] = 0.
\end{aligned}$$

Nous déduisons ainsi

$$\left|\log[a_1(T^{n-1} x) T^{n-1} x]\right| \leq \left|\log \frac{1}{2}\right| = \log 2,$$

et donc $|R_n(x)| \leq 2 + \log 2$, pour tout x, ce qui donne le résultat recherché. Enfin, pour déduire le résultat concernant $p_n(x)$, il suffit de se rappeler que $p_n(x) = q_{n-1}(Tx)$, comme vu précédemment.

(5) La proposition 4 donne

$$\frac{1}{q_{n+2}(x)^2} < \left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| < \frac{1}{q_n(x)^2},$$

et donc

$$\frac{2}{n} \log q_n(x) < -\frac{1}{n} \log \left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| < \frac{2}{n} \log q_{n+2}(x).$$

Le résultat recherché s'obtient alors, grâce au point précédent, en passant à la limite.

□

Le point (i) du théorème ci-dessus précise la fréquence d'apparition de chaque chiffre dans le DFC de presque tout réel (en particuliers, les petits chiffres apparaissent plus souvent que les grands) ; par ailleurs, cela implique aussi que tout chiffre apparaît une infinité de fois dans le DFC d'un nombre réel typique ! Les points (ii) et (iii) donnent de l'information sur les moyennes arithmétiques et géométriques des chiffres du DFC. Enfin, le point (iv) précise le taux de croissance des convergents p_n et q_n, et le dernier point explicite le taux auquel les convergents p_n/q_n approchent un nombre réel typique.

Remarquons toutefois qu'aucun nombre satisfaisant le point (iii) du théorème ci-dessus n'est encore connu explicitement à ce jour, quoique, à en croire les simulations numériques, il y a fort à parier que π, γ ou encore la constante de Khintchine K elle-même satisfont tous cette propriété. Par ailleurs, il est clair qu'aucun rationnel ne la satisfait, ni non plus aucun réel quadratique (à cause du théorème 6). Il est aisé de vérifier que e ne la satisfait pas non plus, car

$$e = 2 + [1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1,\ldots],$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} (a_1(e)\ldots a_n(e))^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (2n!)^{1/(3n-1)} = +\infty.$$

4 Approximations diophantiennes

Une *approximation diophantienne* d'un nombre irrationnel est une approximation de ce nombre par des rationnels. Un exemple en est donné par les convergents correspondants au DFC de l'irrationnel en question. En fait, l'approximation donnée par les convergents est même optimale, dans le sens suivant :

Théorème 13 (Théorème de meilleure approximation). *Soit $x \in\,]0,1[\setminus \mathbb{Q}$. Notons $p_n(x), q_n(x)$ les convergents. Alors, pour tout $n > 1$, pour tout p, q avec $0 < q \le q_n(x)$ et $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$, on a*

$$|p_n(x) - q_n(x)x| \le |p - qx|.$$

En particulier,

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|.[9]$$

Démonstration. Voir, par exemple, la proposition 3.3 de [5]. □

Rappelons la proposition 4, qui donne la borne suivante pour l'erreur d'approximation par les convergents :

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| < \frac{1}{q_n(x)q_{n+1}(x)} < \frac{1}{q_n(x)^2}.$$

Allié au théorème de meilleure approximation, ce résultat précise la rapidité à laquelle il est possible d'espérer approcher un irrationnel quelconque par des rationnels :

9. La quantité $\left|x - \frac{a}{b}\right|$ est appelée l'*erreur d'approximation* de x par le rationnel $\frac{a}{b}$.

Théorème 14 (Théorème de Dirichlet asymptotique). *Pour tout $x \in]0,1[\setminus \mathbb{Q}$, il existe une infinité de rationnels p/q tels que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Ce résultat peut en fait encore être raffiné : le résultat asymptotique optimal est le suivant.

Théorème 15 (Hurwitz). *Pour tout $x \in]0,1[\setminus \mathbb{Q}$, il existe une infinité de rationnels p/q tels que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Il est possible de démontrer qu'à la fois la vitesse de décroissance du $1/q^2$ et la constante $1/\sqrt{5}$ sont optimales. Notons que c'est pour le nombre d'or (et ses transformations homographiques) que la constante $1/\sqrt{5}$ ne peut être remplacée par aucune constante plus petite. [10] C'est pourquoi le nombre d'or est parfois appelé « l'irrationnel le plus irrationnel ». Il se trouve que ce fait est profondément en rapport avec la simplicité du DFC de ce nombre : de façon générale, il est possible de montrer que, en un certain sens, plus un nombre est « simple » du point de vue de son DFC, plus il est « mauvais » du point de vue de ses approximations diophantiennes (voir, par exemple, la section 11.8 de [7] pour de plus amples détails).

Bien sûr, pour certains irrationnels, le $1/q^2$ peut être remplacé par une fonction à plus forte décroissance, alors que, pour d'autres, cela ne sera pas possible. Il est ainsi naturel de définir deux classes extrêmes de nombres : les nombres *très bien approximables* et les nombres *mal approximables*.

4.1 Nombres mal approximables

Les nombres mal approximables sont définis comme étant les irrationnels pour lesquels l'erreur d'approximation ne décroît pas plus vite que $1/q^2$. Plus précisément,

Définition 16. Un irrationnel $x \in]0,1[$ est dit *mal approximable* s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\epsilon}{q^2}$$

pour tout rationnel $\frac{p}{q}$.

Ces nombres peuvent être caractérisés très simplement en termes de leur DFC.

Théorème 17. *Un irrationnel $x = [a_1, a_2, \ldots] \in]0,1[$ est mal approximable si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que $a_j \leq M$ pour tout j.*

10. Si nous oublions le nombre d'or, alors cette constante peut être remplacée par la constante $1/\sqrt{8}$ qui est quant à elle optimale pour $\sqrt{2}$. Si nous omettons à la fois le nombre d'or et $\sqrt{2}$, cette constante peut être remplacée par $1/(\sqrt{221}/5)$. La suite de constantes $(1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{8}, 1/(\sqrt{221}/5), 1/(\sqrt{1517}/13), \ldots)$ est le *spectre de Lagrange*.

Démonstration. Si x est mal approximable, on obtient, pour tout n,

$$\frac{\epsilon}{q_n^2} \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Mais alors,

$$a_{n+1} q_n < a_{n+1} q_n + q_{n-1} = q_{n+1} < \frac{q_n}{\epsilon},$$

c'est-à-dire $a_n < 1/\epsilon$, pour tout n.

Réciproquement, si les chiffres du DFC sont bornés par M, alors, pour tout k,

$$q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} < (a_{k+1} + 1) q_k \leq (M+1) q_k.$$

Or, pour tout naturel q, il existe un n tel que $q_{n-1} < q \leq q_n$. Dès lors, le théorème 13 donne

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| \geq \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| > \frac{1}{q_n q_{n+2}} > \frac{1}{(M+1)^4 q^2},$$

puisque $q_n q_{n+2} < (M+1) q_n q_{n+1} < (M+1)^2 q_n^2 < (M+1)^4 q_{n-1}^2 < (M+1)^4 q^2$. Ceci montre donc que x est mal approximable. □

Mais alors, pour de tels nombres, nous déduisons donc $\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) \leq M$, de sorte que les nombres mal approximables sont des exceptions au théorème 12(ii). Par conséquent,

Corollaire (Khintchine). *Les nombres mal approximables constituent un ensemble de mesure de Lebesgue nulle (et pourtant clairement infini non dénombrable) !*

Des exemples de nombres mal approximables sont donnés par le résultat suivant, qui découle immédiatement des théorèmes 6 et 17.

Corollaire. *Tout irrationnel quadratique est mal approximable.*

Remarquons par ailleurs qu'il est toujours inconnu à ce jour s'il existe d'autres irrationnels algébriques mal approximables que les irrationnels quadratiques.

4.2 Nombres très bien approximables

Les nombres très bien approximables sont définis comme étant les irrationnels pour lesquels l'erreur d'approximation décroît sensiblement plus vite que $1/q^2$. Plus précisément,

Définition 18. Un irrationnel $x \in \,]0,1[$ est dit *très bien approximable* s'il existe un $\delta > 0$ tel qu'il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ (p, q naturels copremiers) satisfaisant

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\delta}}.$$

Théorème 19 (Khintchine). *Les nombres très bien approximables constituent un ensemble de mesure de Lebesgue nulle (et pourtant infini non dénombrable[11]) !*

11. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que c'est bien un ensemble infini non dénombrable. Un moyen de le voir est d'utiliser le fait qu'un nombre $x \in \,]0,1[$ est très bien approximable si et seulement si

Démonstration. Supposons que x est très bien approximable, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de rationnels p/q (p,q naturels copremiers) tels que $|x - p/q| \leq 1/q^{2+\delta}$, pour un certain $\delta > 0$ donné. Alors, pour chaque p/q admissible, il existe forcément un n avec $q_{n-1} < q \leq q_n$, et donc

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\delta}} < \frac{1}{q_{n-1}^{2+\delta}},$$

ce que l'on peut réécrire

$$\frac{2+\delta}{n} \log q_{n-1} < -\frac{1}{n} \log\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|. \tag{3}$$

Comme il y a une infinité de p/q admissibles, nous déduisons directement que l'équation (3) est satisfaite pour une infinité de valeurs de n – disons pour tout $n \in N$ où $N \subset \mathbb{N}$ sous-ensemble infini.
Mais alors, si x satisfaisait les points (iv) et (v) du théorème 12, nous déduirions

$$\begin{aligned}(2+\delta)\frac{\pi^2}{12\log 2} = (2+\delta)\lim_{n\to\infty}\frac{\log q_{n-1}}{n} &= (2+\delta)\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}}\frac{\log q_{n-1}}{n}\\ &\leq -\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}}\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{\pi^2}{6\log 2},\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction ! Donc, x doit appartenir à l'ensemble des exceptions du théorème 12, qui est de mesure de Lebesgue nulle. □

Nous avons défini les nombres très bien approximables comme les irrationnels dont l'erreur d'approximation décroît *polynomialement* plus vite que $1/q^2$, et nous venons de voir que ces nombres constituaient un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Il est tout à fait naturel de se demander alors ce qu'il en est si nous demandons seulement que l'erreur décroisse plus vite que $1/q^2$ (mais pas forcément polynomialement). La généralisation suivante du théorème 19 peut en fait être démontrée [12] :

Théorème 20 (Khintchine, Beresnevich, Dickinson, Velani). *Soit* $\psi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$. *L'ensemble*

$$\left\{x \in]0,1[: \textit{il existe une infinité de rationnels } p/q \textit{ tels que } \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{\psi(q)}{q}\right\}$$

est de mesure de Lebesgue nulle si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)$ *converge, et de mesure de Lebesgue 1 si cette série diverge.*

---

il existe un $\epsilon > 0$ avec la propriété que $a_{n+1} \geq q_n^{\epsilon}$ pour une infinité de valeurs de n (voir Exercice 3.3.2 de [5]). Autrement, le lecteur peut directement vérifier que, pour tout réel $r > 2$, le nombre

$$x_r := 2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\lceil r^n \rceil}$$

est très bien approximable (avec $\delta = r - 2$).

12. Il s'agit d'un résultat fameux dû à Khintchine (voir [8]), mais raffiné par Beresnevich, Dickinson et Velani en 2006 (voir [1]) : ceux-ci ont réussi à laisser tomber la condition supplémentaire que $x \mapsto x^2\psi(x)$ soit décroissante.

Démonstration. Voir [1]. □

Dans le cadre de la théorie des approximations diophantiennes, à côté de ces résultats qualitatifs non triviaux obtenus à partir du théorème de Khintchine-Lévy (théorème 12), moult questions intéressantes viendront naturellement à l'esprit du lecteur : par exemple, que pouvons-nous dire si nous ne considérons non plus des approximations par des rationnels, mais par une autre classe de nombres, comme les nombres algébriques ? De tels sujets sont encore au cœur de l'actualité mathématique et conduisent très rapidement à des problèmes ouverts. Le lecteur intéressé trouvera certainement son bonheur en consultant [9] et les nombreuses références qui y sont données.

Remerciements

Je tiens à remercier tous les organisateurs de la BSSM pour m'avoir accordé leur prix (conjointement avec Cédric De Groote) et donc l'occasion de présenter cet exposé à la BSSM 2012.

Je remercie également Pr. Pierre Gaspard pour son soutien et les discussions intéressantes que mon travail de BA3 en théorie ergodique a suscitées tout au long de l'année écoulée.

5 Bibliographie

[1] V. Beresnevich, D. Dickinson, and S. Velani, *Measure theoretic laws for lim sup sets*, Mem. Amer. Math. Soc., 179 (2006), pp. x+91.

[2] G. D. Birkhoff, *Proof of the Ergodic Theorem*, Proceedings of the National Academy of Science, 17 (1931), pp. 656–660.

[3] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, and Y. G. Sinaĭ, *Ergodic theory*, vol. 245 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, New York, 1982. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ.

[4] M. Duerinckx, *Théorie ergodique et applications*. Notes du travail de BA3, 2012.

[5] M. Einsiedler and T. Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory*, vol. 259 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag London Ltd., London, 2011.

[6] B. Green, *Ergodic theory*, 2008. University of Cambridge. Notes de cours.

[7] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, Oxford, sixth ed., 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles.

[8] A. Y. Khinchin [Khintchine], *Continued fractions*, The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1964.

[9] M. Waldschmidt, *Recent advances in Diophantine approximation*, in Number theory, analysis and geometry, Springer, New York, 2012, pp. 659–704. In Memory of Serge Lang.