BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 5

Ensembles pathologiques

1. Construire un sous-ensemble de $[0,1[$ non mesurable au sens de Lebesgue, de la façon suivante (contrexemple de Vitali).

(i) Montrer que la relation $\sim$ définie sur $[0,1[$ par

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{Q}$$

est une relation d'équivalence.

(ii) Soit $\mathcal{A} = [0,1[/\sim$. Soit $\psi : \mathcal{A} \to [0,1[$ une fonction telle que $\psi(\alpha) \in \alpha$, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$. On note $\psi(\mathcal{A}) = A$. Montrer que

$$\{A + q\,;\, q \in \mathbb{Q},\ |q| < 1\}$$

est une famille d'ensembles disjoints dont la réunion contient $[0,1[$.

(iii) En supposant A mesurable, obtenir une contradiction.

2. L'ensemble triadique de Cantor C est le sous-ensemble de $[0,1]$ qui reste après en avoir enlevé successivement l'intervalle $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, puis les 2 intervalles $]\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}[$ et $]\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}[$, puis les 4 intervalles

$$\left]\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right[, \quad \left]\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right[, \quad \left]\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right[, \quad \left]\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right[,$$

et ainsi de suite.

(i) Donner de C une définition plus formelle.

(ii) Montrer que C est compact.

(iii) Montrer que C est de mesure de Lebesgue nulle.

(iv) Soit $x \in [0,1[$. Montrer qu'il existe une suite de $\alpha_n \in \{0,1,2\}$, non tous égaux à 2 à partir d'un certain rang, tels que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}.$$

On note $x = 0 \cdot \alpha_1\alpha_2\ldots$ (ceci est le développement triadique de x).

(v) Montrer que $C \supset \{x \in [0,1[\,;\, x = 0 \cdot \alpha_1\alpha_2\ldots \text{ avec } \alpha_n \in \{0,2\}\}$. En déduire que C n'est pas dénombrable.

3. On définit une fonction f de $[0,1[$ dans l'ensemble de Cantor C, de la façon suivante. Si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

où $a_n \in \{0,1\}$ pour tout n, les a_n n'étant pas tous égaux à 1 à partir d'un certain rang, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}.$$

(i) Montrer que f n'est pas continue, mais qu'elle est strictement croissante.

(ii) Soit $A \subset [0,1[$ non mesurable au sens de Lebesgue. Montrer que $f(A)$ est mesurable mais non borélien.

4. L'ensemble de Smith-Volterra-Cantor (SVC) est le sous-ensemble E de $[0,1]$ obtenu itérativement comme suit : on enlève le quart $(1/2^2)$ médian, ce qui donne $[0,3/8] \cup [5/8,1]$, puis on enlève le $1/2^4$ médian de chaque sous-intervalle restant, ce qui donne

$$[0,5/32] \cup [7/32,3/8] \cup [5/8,25/32] \cup [27/32,1],$$

puis on enlève le $1/2^6$ médian de chaque sous-intervalle restant, et ainsi de suite.

(i) Donner de E une définition plus formelle.

(ii) Montrer que E est compact.

(iii) Montrer que E est de mesure de Lebesgue $1/2 > 0$. (Au passage, ceci implique que E est de dimension de Hausdorff 1.)

(iv) Montrer que, quoique l'ensemble E soit de mesure strictement positive, cet ensemble est nulle part dense (i.e. l'intérieur de l'adhérence de E est vide), ce qui veut dire en particulier que E ne contient aucun intervalle !

(v) Montrer que la fonction bornée 1_E est Lebesgue-intégrable, mais n'est pas Riemann-intégrable, et n'est en outre équivalente (i.e. égale Lebesgue-presque partout) à aucune fonction Riemann-intégrable !

(vi) Considérer la généralisation de la définition de E consistant à retirer la fraction r_n médiante de chaque sous-intervalle à l'étape n (alors que pour E on avait choisi $r_n = 2^{-2n}$). Quelle condition sur la suite $(r_n)_n$ assure que l'ensemble obtenu soit de mesure de Lebesgue strictement positive ?