Examen d'analyse - Partie exercices

MATH-F301

27 mai 2016

Veillez à justifier soigneusement toutes vos affirmations.

Question 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et soit $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{A})$ une application mesurable. Étant μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on définit

$$f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)), \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

(a) Montrer que $f_*\mu$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

(b) Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où μ est la mesure de Lebesgue, et où $f(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer la mesure $f_*\mu$ des intervalles du type $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$.

On dit qu'une mesure μ est f*-invariante* si $f_*\mu = \mu$.

(c) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différente de l'identité, telle que la mesure de Lebesque soit f-invariante.

(d) Dans le cas où f est la fonction du point (b), déterminer toutes les mesures finies f-invariantes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Question 2. Soient f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Vérifier que

$$F(x, y) = f(x - y)g(y)$$

est borélienne.

(b) Montrer que, si de plus f et g sont intégrables, alors on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)g(y)| \, dy < +\infty. \tag{1}$$

Pour de tels x, on définit le produit de convolution entre f et g par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy. \tag{2}$$

(c) Montrer que (1) et (2) restent inchangés si on modifie f et g sur un ensemble de mesure nul.

(d) Montrer que pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Question 3. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ une application linéaire continue.

(a) Montrer que, si l'application T satisfait

$$(\star) \qquad \exists c > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X,$$

alors son image $\operatorname{Im} T$ est fermée dans Y.

(b) Déduire que l'application T est inversible si et seulement si la propriété $(\star)$ est vérifiée et l'image $\operatorname{Im} T$ est dense dans Y.

Question 4. Soit H un espace de Hibert séparable, soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ une base orthonormée, et soit $T : H \to H$ l'opérateur linéaire défini par $Te_n = \frac{1}{n} e_n$ pour tout n. Le but de cet exercice est de déterminer le spectre $\sigma(T)$ de cet opérateur.

(a) Montrer que T est bien défini et continu sur H.

(b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de T coïncide avec $E := \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Déduire $E \cup \{0\} \subset \sigma(T)$.

(c) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$ l'image $\operatorname{Im}(T - \lambda)$ est dense dans H.
Indication : Vérifier que $\{\sum_{n=1}^N x_n e_n : N \in \mathbb{N}_0, (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N\} \subset \operatorname{Im}(T - \lambda)$.

(d) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (E \cup \{0\})$ il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|(T - \lambda)x\| \geq \epsilon \|x\|$ pour tout $x \in H$.

(e) En utilisant le résultat de la question 3, déduire le spectre $\sigma(T)$.

Question 5. On considère les fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^x \cos(e^x)$ sur $\mathbb{R}$, et on note T_f et T_g les distributions régulières associées.

(a) Montrer que T_f n'est pas une distribution tempérée.

(b) Observer que $e^x \cos(e^x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(e^x)$, et en déduire que T_g est une distribution tempérée. La croissance en espace d'une fonction localement intégrable ne suffit donc pas à déterminer si la distribution régulière associée est tempérée.