BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 14 bis

Systèmes orthogonaux

1 Introduction

Soit $]a, b[\subset \mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$, et soit μ une mesure borélienne sur $]a, b[$. Supposons que $P|_{]a,b[} \in L^2(]a, b[, \mu)$ pour tout polynôme P. Appliquant le procédé de Gram-Schmidt dans $L^2(]a, b[, \mu)$ à la base ordonnée $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ du sous-espace des polynômes, on obtient un système orthogonal $\{p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$.

Cette procédure produit des systèmes orthogonaux de fonctions dont certains sont très utilisés en physique (particulièrement en mécanique quantique). En voici quelques exemples avec $d\mu = w(x)\,dx$, où $w \in C^\infty(]a, b[)$.

	p_n	$]a, b[$	w	Normalisation
Polynômes de Legendre	P_n	$]-1, 1[$	1	$P_n(1) = 1$
Polynômes de Laguerre	L_n	$]0, \infty[$	e^{-x}	$\\|L_n\\|_{L^2_\mu} = 1$
Polynômes de Laguerre généralisés ($\alpha > -1$)	L_n^α	$]0, \infty[$	$x^\alpha e^{-x}$	$\\|L_n^\alpha\\|^2_{L^2_\mu} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$
Polynômes d'Hermite	H_n	$]-\infty, \infty[$	e^{-x^2}	$\\|H_n\\|^2_{L^2_\mu} = 2^n n! \sqrt{\pi}$

En pratique, le procédé de Gram-Schmidt n'est pas toujours la façon la plus commode d'obtenir l'expression de ces polynômes. Alternativement, on peut par exemple utiliser

— **des relations de récurrence** (voir exercices 1 et 3) ;

— **les formules de Rodrigues** :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad (1)\\ L_n(x) &= \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),\\ L_n^\alpha(x) &= \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}),\\ H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\ ; \end{aligned}$$

— **la méthode des fonctions génératrices** (on voit les polynômes $p_n(x)$ comme les coefficients d'une série de Maclaurin en t d'une fonction $F(x,t)$) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty P_n(x)t^n &= F_P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \qquad (2)\\ \sum_{n=0}^\infty L_n(x)t^n &= F_L(x,t) = \frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{1-t},\\ \sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha(x)t^n &= F_{L^\alpha}(x,t) = \frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}},\\ \sum_{n=0}^\infty \frac{H_n(x)}{n!}t^n &= F_H(x,t) = e^{2xt-t^2}. \end{aligned}$$

2 Exercices

1. Soit $\{p_n \,|\, n\in\mathbb{N}\}$ une suite de polynômes orthogonaux dans $L^2(]a,b[,\mu)$, avec $\deg p_n = n$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}_0$, il existe a_n, b_n et $c_n\in\mathbb{R}$ tels que la relation de récurrence

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x)$$

soit satisfaite.

Les exercices suivants concernent plus spécifiquement les polynômes de Legendre.

2. Démontrer comme suit les formules (1) et (2). On pose

$$P_n^R(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

(i) Vérifier que P_n^R est de degré n, et que $P_n^R \perp P_m^R$ dans $L^2(-1,1)$ si $m \neq n$.

(ii) Vérifier que $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^R(x)t^n = F_P(x,t)$.

(a) En considérant P_n^R comme une fonction à variable complexe, déduire de la formule de Cauchy que P_n^R est donnée par *l'intégrale de Schläfli* :

$$P_n^R(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz,$$

où C est une courbe fermée simple bordant un domaine D contenant x.

(b) Fixant x et C, montrer par le critère de Weierstrass que si $\epsilon > 0$ est assez petit, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2-1)^n t^n}{2^{n+1}\pi i(z-x)^{n+1}}$$

converge uniformément en $z \in C$ pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$.

(c) En déduire que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n^R(x)t^n &= -\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{dz}{tz^2-2z+2x-t} \\ &= -\frac{1}{t\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-z_-)(z-z_+)},\end{aligned}$$

où

$$z_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-2xt+t^2}}{t}.$$

(d) Si t est suffisamment petit, D contient z_- mais pas z_+. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^R(x)t^n = \frac{2}{t}\frac{1}{(z_+-z_-)} = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \tag{3}$$

(iii) Vérifier que $P_n^R(1) = 1$ en utilisant (3).

3. Les relations de récurrence de l'exercice 1 s'obtiennent explicitement en dérivant la fonction génératrice $F(x,t)$ par rapport à t et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de t. Montrer ainsi que

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \tag{4}$$

4. En dérivant $F(x,t)$ par rapport à x et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de t, on obtient des équations différentielles satisfaites par les polynômes.

(i) Montrer ainsi que

$$P'_n(x) - 2xP'_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x) = P_{n-1}(x). \tag{5}$$

(ii) En déduire que

$$\big((1-x^2)P'_n(x)\big)' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Indications pour (ii). Montrer que

$$\big((1-x^2)P'_n(x)\big)' = \lambda P_n(x)$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Afin de déterminer λ, obtenir la relation

$$P'_n(x) - nP_{n-1}(x) - xP'_{n-1}(x) = 0$$

en combinant (4) et (5), et en tirer

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5. Les polynômes de Legendre forment un système orthogonal complet de $L^2(-1,1)$: si $f \in L^2(-1,1)$ est orthogonal à toutes les polynômes de Legendre, alors $f = 0$.

(i) Montrer que la transformée de Fourier

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-1}^{1} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

(ii) L'hypothèse faite sur f est équivalente à

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, x^n\, dx = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'elle implique

$$(\partial_\xi^n \hat{g})(0) = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) En déduire que $\hat{g} = 0$, d'où $f = 0$.