BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 1

Topologie générale

Rappels. Une topologie sur un espace X est une collection de sous-ensembles de X (appelés ouverts) satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $\emptyset$ et X sont des ouverts ;

(ii) l'intersection de deux ouverts est un ouvert ;

(iii) une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

Un sous-ensemble de X est dit fermé si son complémentaire dans X est ouvert. Étant donné $x \in X$ et $A \subset X$:

- on dit que A est un voisinage de x s'il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $U \subset A$;
- on dit que x est un point d'adhérence de A si, pour tout ouvert U tel que $x \in U$, l'intersection de A et U est non vide ;
- l'intérieur de A (noté $\operatorname{int} A$) est défini comme l'ensemble des points de X dont A est un voisinage ;
- l'ensemble des points d'adhérence de A (noté $\overline{A}$) est appelée la fermeture de A.

De façon équivalente, on peut définir $\operatorname{int} A$ comme la réunion de tous les ouverts inclus dans A, et $\overline{A}$ comme l'intersection de tous les fermés contenant A.

1. Soient X un espace topologique et A, B des sous-ensembles quelconques de X. Démontrer les relations suivantes :

(i) $(\operatorname{int} A)^c = \overline{A^c}$;

(ii) $\overline{A}^{\,c} = \operatorname{int} A^c$;

(iii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $A \subset \overline{A}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(iv) $\operatorname{int} X = X$, $\operatorname{int} A \subset A$, $\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$, $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;

(v) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

2. On définit la topologie de Zariski τ_z sur $\mathbb{R}$ comme suit : $A \in \tau_z$ si et seulement si $A = \emptyset$ ou A^c est fini. Quelles sont les parties denses et les fermés à intérieur non vide pour cette topologie ? L'identité, définie de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ dans $(\mathbb{R}, \tau_z)$, où τ_u est la topologie usuelle, est-elle continue ? Est-elle un homéomorphisme ?

3. Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On fixe un point $p \in \mathbb{R}^2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$D(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{si } x, y \text{ et } p \text{ sont alignés,} \\ d(x,p) + d(y,p) & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Montrer que D est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

(ii) Soient $r > 0$ et m un point différent de p. Dessiner les boules $B_D(p,r)$ et $B_D(m,r)$.

4. Pour $x, y \in [0,1]$, on définit $d(x,y) = |x - y|$ et $D(x,y) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$.

(i) Montrer que d et D sont des distances sur $[0,1]$ définissant les mêmes ouverts.

(ii) Existe-t-il $k > 0$ tel que $D(x,y) \leq k\, d(x,y)$ pour tous $x, y \in [0,1]$? Que peut-on en conclure en termes d'équivalence de topologies et de distances ?

5. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles, muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

(i) Montrer que $A := \{f \in E\,;\ f(x) > 0 \text{ pour tout } x \in [0,1]\}$ est ouvert.

(ii) Montrer que $B := \{f \in E\,; \text{ il existe } x \in [0,1] \text{ tel que } f(x) = 0\}$ est fermé.

(iii) Déterminer la frontière de $C := \{f \in E\,;\ f(0) > 0\}$.

(iv) Montrer que A n'est pas ouvert pour la topologie définie par la norme $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

6. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue ;

(ii) pour tout $A \subset X$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(iii) pour tout $B \subset Y$, on a $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int} f^{-1}(B)$;

(iv) pour tout $B \subset Y$, on a $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.