BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 4

Comparaison entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue

Étant donné une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **bornée**, on dit que f est *intégrable au sens de Riemann* (int_R) sur $[a,b]$ lorsque

$$\underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx = \overline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx \quad \Big(\overset{\text{déf}}{=} (R)\int_a^b f(x)\,dx\Big),$$

où

$$\underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx = \sup\Big\{\int_a^b \psi(x)\,dx\,;\ \psi \text{ en escalier et } \psi \le f \text{ sur } [a,b]\Big\},$$
$$\overline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx = \inf\Big\{\int_a^b \varphi(x)\,dx\,;\ \varphi \text{ en escalier et } f \le \varphi \text{ sur } [a,b]\Big\}.$$

On pose, pour tout $x \in [a,b]$, $\underline{f}(x) = \lim_{\delta\to 0^+} I_\delta(x)$ et $\overline{f}(x) = \lim_{\delta\to 0^+} S_\delta(x)$, avec

$$I_\delta(x) = \inf\{f(y)\,;\ y \in [a,b], |y-x| < \delta\},$$
$$S_\delta(x) = \sup\{f(y)\,;\ y \in [a,b], |y-x| < \delta\}.$$

Montrer que

(i) pour tout $x \in [a,b]$, $I_\delta(x)$ est une fonction décroissante de δ, tandis que $S_\delta(x)$ est une fonction croissante de δ ;

(ii) $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sont bien définies et $\underline{f} \le f \le \overline{f}$ sur $[a,b]$;

(iii) il existe une suite de fonctions ψ_n en escalier, inférieures à f sur $[a,b]$ pour tout n, et convergeant vers $\underline{f}$ en tout point de $[a,b] \setminus M$, où M est au plus dénombrable ;

(iv) $\underline{f}$ est borélienne et

$$(L)\int_a^b \underline{f}(x)\,dx = \underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx\,;$$

(v) il existe une suite de fonctions φ_n en escalier, supérieures à f sur $[a,b]$ pour tout n, et convergeant vers $\overline{f}$ en tout point de $[a,b] \setminus M'$, où M' est au plus dénombrable ;

(vi) $\overline{f}$ est borélienne et

$$(L)\int_a^b \overline{f}(x)\,dx = \overline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx\,;$$

(vii) f est int_R ssi $\underline{f} = \overline{f}$ presque partout sur $[a,b]$;

(viii) si f est int_R, alors f est intégrable au sens de Lebesgue et

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx\,;$$

(ix) f est int_R ssi f est mesurable et l'ensemble de points de discontinuité de f est négligeable (aide : f est continue au point x ssi $\underline{f}(x) = \overline{f}(x) = f(x)$) ;

(x) la fonction de Dirichlet sur $[0,1]$ n'est pas int_R mais coïncide presque partout avec une fonction continue.