BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 7 (principe de Cavalieri)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive et Lebesgue-mesurable.

1. On pose
$$A(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < y < f(x)\}.$$
Montrer que $A(f)$ est mesurable (L) dans $\mathbb{R}^2$ et que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ coïncide avec la mesure de $A(f)$ dans $\mathbb{R}^2$.
(*Hint* : utiliser une suite de fonctions simples tendant vers f.)

2. Montrer que le graphe de f,
$$G(f) = \{(x, f(x));\ x \in \mathbb{R}\},$$
est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$.
(*Hint* : pour $i, j \in \mathbb{Z}$, poser
$$\begin{aligned} I_{ij} &= f^{-1}([i, i+1[) \cap [j, j+1[, \\ G_{ij}(f) &= \{(x, f(x));\ x \in I_{ij}\}, \end{aligned}$$
et montrer que $G_{ij}(f)$ est de mesure nulle.)

3. Soit $A(f)$ comme dans l'exercice 1. Vérifier que
$$\mathbf{1}_{A(f)}(x, y) = \mathbf{1}_{]y,\infty[}(f(x)) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$
En déduire le principe de Cavalieri : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive et Lebesgue-mesurable,
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^+} m(\{x \in \mathbb{R}\,;\ f(x) > y\})\, dy.$$